СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – проницательность.

Ф. Бэкон

МАТЕМАТИКА

№ 11
МАРТ
2009

Знакомая незнакомка

Функция $y = ax^2 + bx + c$ — одна из самых простых и знакомых функций во всем школьном курсе математики, и кажется, что про неё все уже должно быть известно. Но не так все просто. Например, график этой функции называется параболой, слово это греческое. Переводят его как *приближение*, *сравнение* и иногда как *приложение*. А откуда это название?

Как вы думаете…

• Если тело движется равноускоренно, то путь, пройденный им, является квадратичной функцией времени. Откуда следует этот результат?

• В чем особенность параболических зеркал? Для чего они нужны?

Что знали о параболе древние греки?

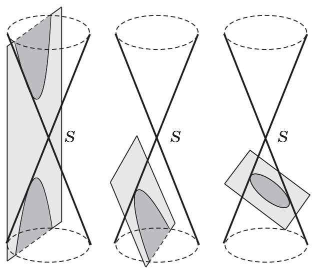
Современная математическая символика возникла в XVI веке. У древнегреческих же математиков не было ни координатного метода, ни понятия функции. Тем не менее свойства параболы были изучены ими очень подробно. Изобретательность античных математиков просто поражает воображение, — ведь они могли использовать только чертежи и словесные описания зависимостей.

Наиболее полно исследовал параболу, гиперболу и эллипс Аполлоний Пергский, живший в III в. до н.э. Он же дал этим кривым названия и указал, каким условиям удовлетворяют точки, лежащие на той или иной кривой (ведь формул-то не было!).

Что мы знаем о параболе?

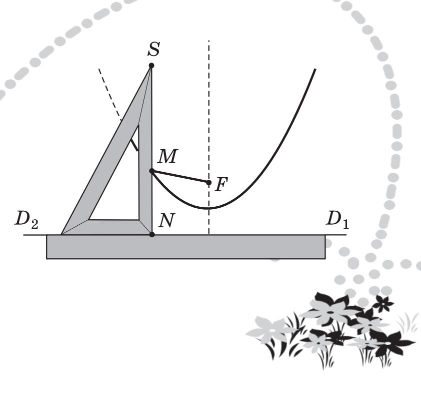
Возьмем неограниченную поверхность, которую называют *конической*. Пересечем ее какой-нибудь плоскостью. В зависимости от того, как расположена эта плоскость, мы получим в сечении гиперболу, параболу или эллипс.

Эти кривые линии объединялись общим названием: *конические сечения* (то есть сечения конуса). А название *парабола* связано с задачей построения прямоугольника с заданной стороной, равновеликого данному квадрату: если заданный квадрат имеет площадь x^2,а одна из сторон искомого прямоугольника должна быть равна a, то верно равенство $x^2 = ay$. Построение такого прямоугольника называлось *приложением*, это название перешло и на связанную с ним кривую.



Геометрия параболы

Парабола имеет очень интересные геометрические свойства. Например, для каждой параболы существует такая прямая (ее называют директрисой) и такая точка (фокус), что каждая точка параболы одинаково удалена от фокуса и директрисы. Если провести ось ординат через фокус перпендикулярно директрисе, а ось абсцисс через середину отрезка, соединяющего фокус и директрису, то уравнение параболы будет выглядеть так: $y = \frac{x^2}{2p}$. Фокус такой параболы находится в точке с координатами $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. На рисунке точка F — фокус, прямая D_1D_2 — директриса, отрезки MN и FM равны между собой.

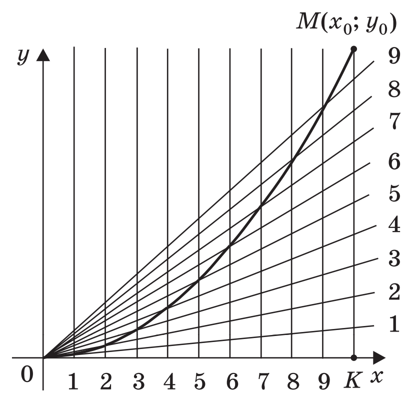


Линия — наша старая знакомая, график квадратичной функции.

Вот еще одно замечательное свойство параболы. Выберем какую-нибудь точку на параболе и проведем через нее два луча: один через фокус параболы, а другой параллельно ее оси симметрии. Если теперь провести касательную к параболе в этой точке, то она образует одинаковые углы с построенными лучами. Это значит, что если мы поместим в фокусе параболы источник света, то лучи от него, отражаясь от параболы, пойдут дальше параллельно ее оси. Поэтому отражатели прожекторов делают в форме параболоидов вращения (поверхностей, которые получаются в результате вращения параболы вокруг ее оси). Свет такого прожектора образует сильный, узконаправленный луч.

• Свет от далекой звезды идет почти параллельно. В какой точке соберется свет, падающий на параболическое зеркало телескопа?

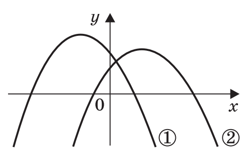
• Хотите увидеть параболоид вращения? Налейте в стакан воды и размешайте ее ложечкой. Когда вы ложечку вынете, поверхность воды примет форму параболоида вращения.



Следующий способ построения параболы $y = x^2$ вы легко сможете обосновать самостоятельно. Пусть известны вершина O параболы и еще одна точка M, лежащая на параболе. Опустим из точки M перпендикуляр MK на ось абсцисс и разделим отрезок MK на несколько равных отрезков. Затем разделим отрезок OK на такое же количество равных между собой отрезков и через каждую из полученных на оси абсцисс точек проведем к ней перпендикуляр. Если мы соединим точку O отрезком с какой-то из отмеченных точек на отрезке MK, то точка пересечения этого отрезка с перпендикуляром, имеющим тот же номер, лежит на параболе.

Рассматривая параболу…

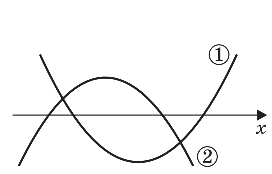
Посмотрим на график квадратичной функции внимательным взглядом. Оказывается, это позволит нам получить массу информации о коэффициентах квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Например, на рисунке изображены графики функций $y = ax^2 + bx + 1$ и $y = -x^2 - x + c$. Где какой график? Что больше: c или 1? Какой знак имеет коэффициент b?



Сначала заметим, что абсцисса вершины параболы $y = -x^2 - x + c$ равна $-\frac{1}{2}$, это число отрицательное, значит, ее вершина расположена левее оси ординат. Итак, это парабола *1*. Теперь вспомним, что ордината точки пересечения графика с осью Oy — это значение функции при $x = 0$. Для функции $y = ax^2 + bx + 1$ это значение равно 1, а для функции $y = -x^2 - x + c$ оно равно c. Но график *1* пересекает ось выше, чем график *2*, следовательно, c больше, чем 1. Чтобы определить знак b, заметим, что вершина параболы *2* расположена правее оси Oy, следовательно, величина $-\frac{b}{2a}$ положительна. Но ветви этой параболы направлены вниз, значит, a отрицательно, следовательно, b положительно.

Решите самостоятельно…

На чертеже изображены графики функций $y = ax^2 + c$ и $y = x^2 + bx + d$, причем ось Oy стерта. Какая функция имеет график *1*, а какая — *2*? Определите знаки b, c и d.



Н. Жарковская
По материалам математического клуба «Кенгуру»
Художник В. Солдатенко