СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии — остроумие, в математике — проницательность.

Ф. Бэкон

МАТЕМАТИКА

№ 15
НОЯБРЬ
2009

Путешествие по геометрическим островам

Острова сыграли важную роль в истории математики от древности до наших дней. Архимед, величайший греческий математик, прожил всю жизнь в Сиракузах на острове Сицилия и умер, защищая свою родину от врагов. Другой великий геометр, Пифагор, родился и вырос на острове Самос. Еще один выдающийся грек — астроном и геометр Гиппократ был родом с Хиоса. Наверное, в зрелище бескрайнего моря и убегающего вдаль горизонта есть что-то располагающее к занятиям геометрией...

В прогулке по геометрическим островам неоценимую помощь мне оказали замечательные лоцманы — книга Роджера Нильса «Proofs without words», изданная в 1993 году Американской математической ассоциацией, и более поздние публикации этого же автора в «College Mathematics Journal».

«Геометрические острова» — метафора, напоминающая о том, что человечество никогда не научилось бы строить океанские корабли, если бы не бесценный опыт плавания на маленьких лодочках... От одного острова до другого, там небольшая передышка, и снова в путь... И в математике многие сложные теоремы оказываются вовсе не такими страшными, если двигаться в их освоении «от острова до острова», а «доплыв», не забывать осматриваться по сторонам и запоминать открывающиеся взору пейзажи.

Пейзаж 1. Вечная теорема Пифагора

Если судить об известности математических теорем по числу придуманных для них доказательств, то самым известным математическим фактом, несомненно, является теорема Пифагора. Число известных ее доказательств исчисляется сотнями. Вот одно из них, почти идеально иллюстрирующее сразу несколько красивых геометрических идей.

Как и в любых подлинно геометричных доказательствах, для понимания достаточно призыва «Смотри!», но... не будем ему следовать. На рисунке 1 показаны квадраты, построенные на катетах и гипотенузе

из них сумме двух меньших. Для этого мы сначала проведем в квадратах диагонали — и перейдем к треугольникам. Площадь каждого равна половине площади своего квадрата. Основная идея доказательства — сдвиг. Если нижнюю вершину темного треугольника сдвинуть вправо по прямой, параллельной его горизонтальному основанию, то получится равновеликий ему треугольник (так как и высота, и основание у него не изменились).

Следующий шаг доказательства — поворот треугольника вокруг вершины (рис. 2). Он, естественно, не меняет площади фигуры.

(заметим, что она идет параллельно стороне квадрата, построенного на гипотенузе). И еще один сдвиг вершины темного треугольника — вправо-вверх по проведенной высоте.

Ровно то же самое повторяем с серым треугольником (рис. 3). В итоге получили, что квадрат, построенный на гипотенузе, разбит штриховой линией на два прямоугольника, а закрашенные части являются их половинками. Значит, сумма их площадей равна половине площади этого квадрата.

Вовсе не каждое доказательство теоремы Пифагора использует «островные» расследовать. На рисунке 1 показаны квадраты, построенные на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника. Поставим цель доказать *равновеликость* большего

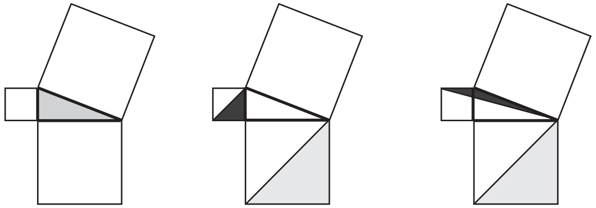

Рис. 1

рот треугольника вокруг вершины (рис. 2). Он, естественно, не меняет площади фигуры. Затем из вершины прямого угла опускаем высоту на гипотенузу и продолжаем ее дальше

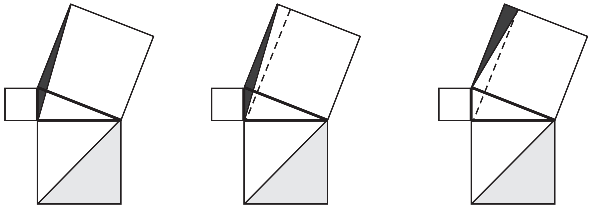

Рис. 2

Вовсе не каждое доказательство теоремы Пифагора использует «островные» рассуждения. Вот другая версия, тоже очень геометричная и очень красивая.

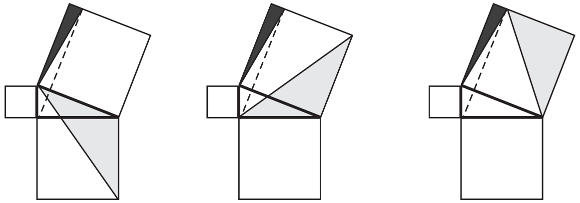

Рис. 3

Снова, казалось бы, хватает одного слова «Смотри!». Однако без аккуратных рассуждений все-таки совершенно непонятно, почему, например, квадратик в центре нижнего квадрата точно такой же, как квадрат, построенный на меньшем катете (рис. 4). А также почему части, на которые разрезан квадрат на большем катете, укладываются вдоль гипотенузы без наложений и зазоров. Оба этих «почему» достаточно просты, то есть ответы на них могут быть получены чисто геометрически, без вычислений и алгебраических преобразований. Сделайте это.

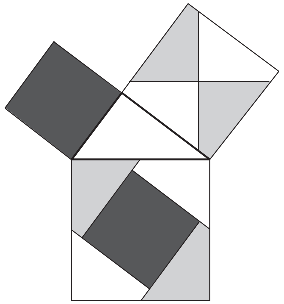

Рис. 4

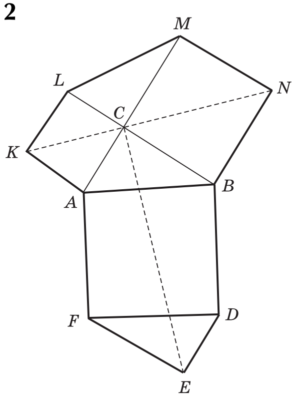

Рис. 5

И еще один островок из моря Пифагоровых доказательств.

Здесь ключевой факт состоит в том, что шестиугольники $ACBDEF$ и $AKLMNB$ (рис. 5) делятся пополам своими диагоналями CE и KN соответственно, и эти их половинки равны: $CAFE = KABN$. Но один из этих шестиугольников составлен из двух треугольников (равных ABC) и двух квадратов катетов, а другой — из тех же двух треугольников и квадрата гипотенузы. Отсюда сразу следует утверждение теоремы Пифагора.

Пейзаж 2. Задача об укладке калиссонов

Калиссоны – французские печенья, любимое блюдо юга Франции. При фабричном изготовлении их обычно делают в овальных формочках, а калиссоны домашнего приготовления чаще всего напоминают ромбы (рис. 6).

Задача о калиссонах формулируется очень просто. Представьте, что все эти ромбики имеют сторону 1, углы 60° и 120° и укладываются без зазоров в коробку, имеющую форму правильного шестиугольника со стороной n, причем так, что короткие диагонали ромбиков параллельны какой-либо из сторон шестиугольника (рис. 7).

Оказывается, что если эту укладку довести до конца, то число калиссонов каждой из трех возможных ориентаций будет одинаковым (рис. 8)! *Доказательство* на рисунке 9.

Рис. 6

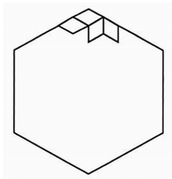

Рис. 7

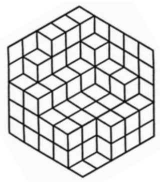

Рис. 8

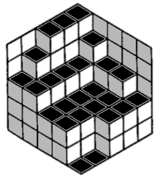

Рис. 9

*Материал подготовил **К. Кноп**. Художник **В. Солдатенко***