СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

*В истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – проницательность.*
Ф. Бэкон

# МАТЕМАТИКА

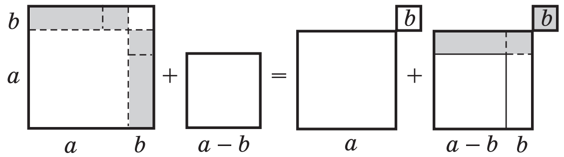
№ 16
НОЯБРЬ
2009

# Путешествие по геометрическим островам

Окончание. Начало в № 15/2009

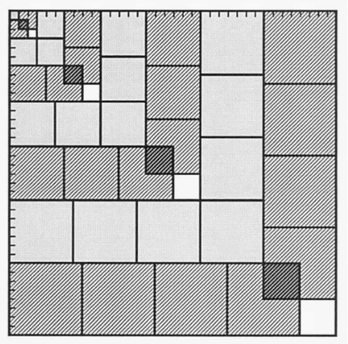
## Пейзаж 3. Геометрические иллюстрации тождеств и неравенств

Язык современной алгебры — творение европейских титанов мысли, таких, как Виет, Декарт и Паскаль. Древние греки не могли записать современной алгебраической нотацией даже такое простое тождество, как $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Тем не менее с доказательством подобных тождеств они отлично справлялись. Примерно вот так:



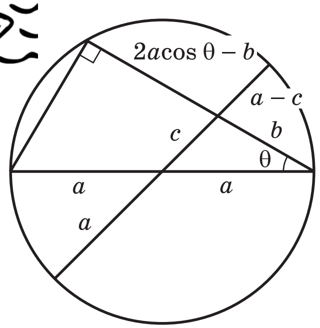

А вот «моментальный снимок» доказательства еще одного классического алгебраического тождества:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2:$$



Здесь показан один квадрат со стороной 1,

Еще один «островок» — картинка к геометрическому доказательству теоремы косинусов.




Здесь в круге построен прямоугольный треугольник, один из катетов которого делит диаметр круга на отрезки $a + c$ и $a - c$. Сам этот катет делится этим диаметром на отрезки $b$ и $2a\cos\theta - b$. Известная геометрическая теорема гласит, что произведения длин отрезков хорд равны, то есть

$$b(2a \cos \theta - b) = (a + c)(a - c),$$

откуда $2ab \cos \theta = a^2 + b^2 - c^2$. Может быть, это доказательство и не проще стандартного школьного, однако оно, несомненно, дарит нам возможность увидеть математический океан с новой точки зрения.

Наконец, доказательство неравенства (здесь доказана правая часть в следующем неравенстве (Коши–Буняковского–Шварца):

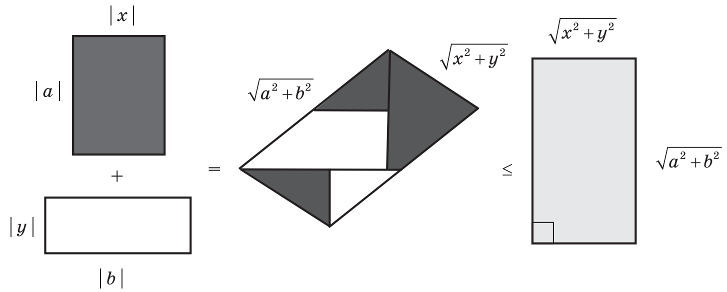
$$|ax + by| \le |a||x| + |b||y| \le \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здесь показан один квадрат со стороной 1, два квадрата со стороной 2, ..., восемь квадратов со стороной 8. Все они аккуратно укладываются в квадрат со стороной $1 + 2 + \ldots + 8$. При этом перекрывающиеся части некоторых квадратов в точности равны соседним непокрытым участкам. Мне кажется, что увидев один раз эту картинку, человек уже не способен забыть ни ее саму, ни то алгебраическое тождество, которое она иллюстрирует.

равенстве (Коши–Буняковского–Шварца):

$$|ax+by| \le |a||x| + |b||y| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

С разрезаниями и равносоставленностью фигур все и так понятно, а дальше используется тот факт, что из всех параллелограммов с данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольник.



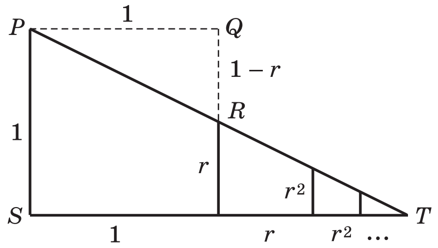

## Пейзаж 4. От прогрессий до интегралов

Древние греки не знали бесконечно малых величин и не умели с ними обращаться. Это, однако, не помешало Зенону сформулировать свою знаменитую апорию об Ахиллесе и черепахе, Архимеду вычислить площадь под параболой, а пифагорейцам доказать иррациональность $\sqrt{2}$ методом, который спустя много-много лет получил название «метод бесконечного спуска». Так что и в наше время не стоит пренебрегать простыми иллюстрациями для демонстрации сложных вещей.

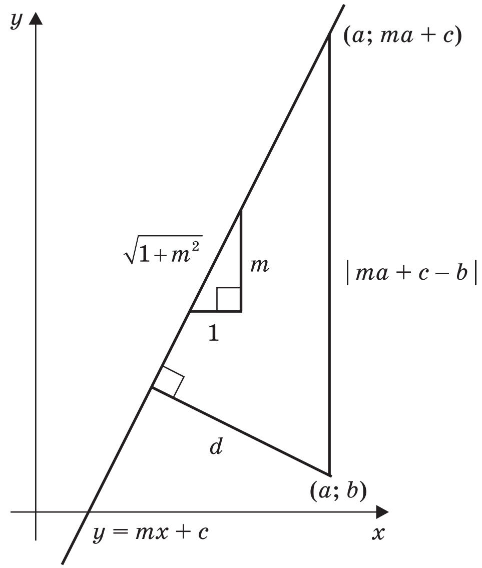
На рисунке построено начало бесконечной последовательности трапеций — каждая следующая приставляется к предыдущей справа. Но главное здесь — подобие треугольников $PQR$ и $TSP$. Следовательно,

$$\frac{1+r+r^2+r^3+\ldots}{1} = \frac{1}{1-r},$$

что сразу дает нам формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.




Формула расстояния от точки до прямой в школе, как правило, либо не проходится вообще, либо тупо заучивается, потому что никто из учеников не в силах ее *понять*. Однако если она проиллюстрирована картинкой, то понимание и осознанное запоминание наступают достаточно быстро.

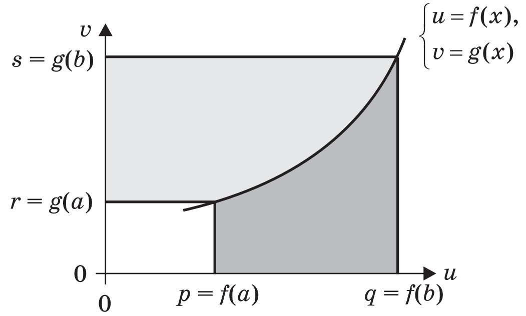



На рисунке два подобных треугольника. Очевидное следствие их подобия — равенство

$$\frac{d}{1} = \frac{|ma+c-b|}{\sqrt{1-m^2}},$$

которое и является искомой формулой расстояния от точки $(a;\ b)$ до прямой $y = mx + c$.

Аналогичной «закавыкой» для студентов технических вузов является формула интегрирования по частям. «Это надо просто выучить», — говорят им лекторы. В итоге очень естественная (геометрически естественная!) формула становится чуть ли не самой «завальной» на экзаменах. А ведь правильный вывод формулы — половина успеха. Вот наглядный способ, предложенный Рихардом Курантом около 70 лет назад:




Сумма двух заштрихованных областей равна, очевидно, разности площадей прямоугольников, то есть $qs - pr$. «В интегралах» это записывается так:

$$\int_r^s u\,dv + \int_p^q v\,du = uv\Big|_{(p;\ r)}^{(q;\ s)},$$

или

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Не правда ли, ничего сложного?

*Материал подготовил **К. Кноп**. Художник **В. Солдатенко***