СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии — остроумие, в математике — проницательность.

Ф. Бэкон

МАТЕМАТИКА

№ 19 ЯНВАРЬ 2010

Графы

Лабиринты

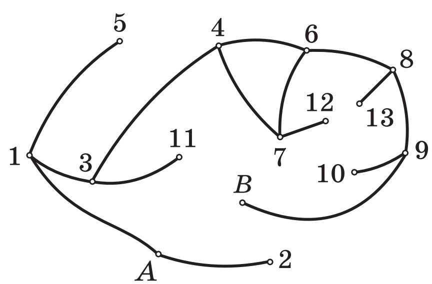
При изучении лабиринтов удобно использовать графы. Точки пересечения разных маршрутов в лабиринте — вершины графа, а участки этих маршрутов — ребра, вот и получим граф лабиринта. По графу легко увидеть, есть ли в лабиринте замкнутые маршруты (их называют *циклами*). Если лабиринт распадается на части, нигде не соединяющиеся между собой, это тоже легко увидеть на графе.

Если в графе можно, двигаясь по ребрам, перейти из любой вершины в любую другую, то граф называют *связным*.

Самый известный способ выбраться из лабиринта таков: на каждой развилке надо всегда поворачивать в одну сторону — только налево или только направо. Этот способ называется правилом одной руки (левой или правой).

К сожалению, помогает оно далеко не во всех лабиринтах. Посмотрите, например, на схему знаменитого Хэмптон-Кортского лабиринта.

Этот лабиринт, образуемый кустарниками, был сооружен в 1690 году по приказу Вильгельма III Оранского, короля Англии. Это из него безуспешно пытались выбраться герои повести Дж. К. Джерома «Трое в лодке, не считая собаки».



На графе этого лабиринта хорошо виден цикл 4–6–7. Если пытаться выйти из этого лабиринта, используя правило одной руки, то легко попасть на этот маршрут. А вот выбраться из цикла, используя это правило, невозможно, не изменив стратегию. Что и произошло с героями повести Дж. К. Джерома.

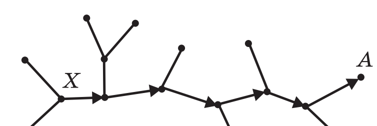
Деревья

Свойства деревьев

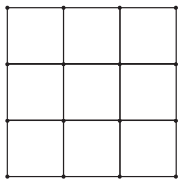
Заметили ли вы, что теперь мы без труда можем решить задачу? Мы должны были получить из сетки дерево с 16 вершинами, а значит, в нем $16 - 1 = 15$ ребер-веревочек. Но в сетке было 24 веревочки. Значит, нам разрешается разрезать точно $24 - 15 = 9$ веревочек. Это можно сделать многими способами — лишь бы сохранилась связность.

Докажем это замечательное свойство.

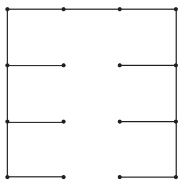
Для начала убедимся в том, что в дереве всегда есть вершина, из которой выходит лишь одно ребро. Такие вершины называются *висячими* — они «висят» на концах веток. (Дерево, состоящее лишь из одной вершины, мы рассматривать не будем.) Отметим в нашем дереве какую-нибудь вершину X и отправимся из нее путешествовать по графу, не проходя дважды по одному ребру. При этом вершины на нашем пути не смогут повторяться — иначе образовался бы цикл. Рано или поздно — наше путешествие закончится: мы впервые войдем в какую-



Задача. Какое наибольшее число веревочек можно разрезать на этой сетке, чтобы она не распалась на куски? (Резать по узлам сетки нельзя!)



Начнем разрезать веревочки так, чтобы сетка не распадалась. Остановимся тогда, когда уже нельзя будет разрезать ни одной веревочки. Что мы получим? Например, то, что изображено на рисунке (разрезанные веревочки здесь стерты). Перед нами — связный граф, в котором нет циклов, такой граф называется *деревом*.



Действительно, этот граф состоит из одного сплошного куска: из каждой вершины можно попасть в любую другую по ребрам. Во-вторых, в этом графе мы не можем ходить «по кругу». В самом деле, если бы в нашем графе был «круговой» маршрут, то, стерев в нем одно из ребер, мы не испортили бы связность — граф не распался бы на куски. И это означало бы, что мы рано закончили резать веревочки!

Понятно и обратное: как бы мы ни резали сетку, если на каком-то шаге у нас получился граф без циклов, мы вынуждены остановиться. Ведь если бы мы все еще могли разрезать некоторое ребро CD, сохранив связность графа, то это означает, что до разрезания ребра CD можно было пройти из C в C «по кругу»!

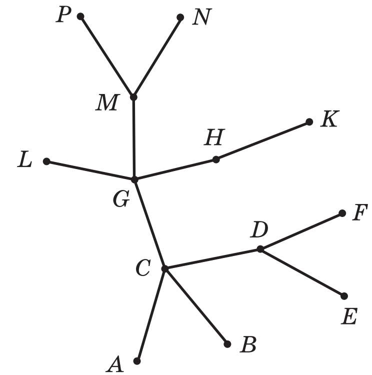
Итак, как бы мы ни резали веревочки сетки, соблюдая требования задачи, остановимся мы тогда и только тогда, когда получим все еще связный граф, но уже без циклов.

Сколько вершин будет в полученном дереве? Столько же, сколько узелков в сетке — 16.

Сколько в нем ребер? Это число определяется очень просто:

число ребер =
= число вершин – 1.

нибудь вершину A, а выйти из нее уже не сможем. Следовательно, из вершины A выходит только одно ребро.



Возьмем теперь в нашем дереве какую-нибудь висячую вершину и сотрем ее вместе с единственным ребром, выходящим из нее. В результате у нас опять получится дерево: ведь такое аккуратное «обрубание» крайней веточки старого дерева не может нарушить связности — дерево не распадется на две ветки. Проделаем с новым деревом то же самое и т.д.

Например, это дерево можно «распилить» на маленькие веточки таким образом: NM, PM, MG, LG, KH, HG, GC, AC, BC, FD, ED (здесь указаны стираемые ребра; из двух указанных вершин стирается первая).

Итак, на каждом шаге в нашем дереве стирается одна вершина и одно ребро. В конце концов мы получим дерево, имеющее лишь две вершины и одно ребро (в нашем примере это ребро CD). А поскольку мы стерли поровну вершин и ребер, то ясно, что в исходном дереве, как и в конечном, вершин было на 1 больше, чем ребер. Тем самым мы доказали, что в каждом дереве число ребер ровно на 1 меньше, чем число вершин.

Попробуйте теперь сами решить эти задачи.

1. Имеется 100 городов, между некоторыми из них проложены дороги с двусторонним движением. Известно, что из любого города можно попасть в любой другой, причем по единственному маршруту. Сколько имеется дорог?

2. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

3. Докажите, что в каждом дереве (где не менее двух вершин) есть хотя бы две висячие вершины.

4. Докажите, что если в дереве ровно 2 висячие вершины, то из каждой другой вершины выходит ровно по 2 ребра. Такие (и только такие) деревья можно «вытянуть в цепочку».

5. Докажите, что в любом связном графе можно удалить какую-то вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы граф остался связным.

Материал подготовлен ***Н. Жарковской*** *и* ***Е. Рисс.***
Художник ***В. Солдатенко***