СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии — остроумие, в математике — проницательность.
Ф. Бэкон

МАТЕМАТИКА

№ 20
ФЕВРАЛЬ
2010

Теорема Коперника и траектория движения точек

Гелиоцентрическая система

О замечательном польском астрономе, механике, математике Николае Копернике (1473–1543) говорят, что он «остановил Солнце и сдвинул Землю». Действительно, после более чем 30 лет наблюдений и опытов, проведенных в своей обсерватории, ученый приходит к выводу, что наша система мира является *гелиоцентрической*: в центре — Солнце, а Земля — одна из планет, вращающихся вокруг Солнца. В своем главном труде «Об обращении небесных сфер» Коперник говорит о том, что Земля, вращаясь вокруг Солнца, вращается также и вокруг своей оси, а ее спутник Луна вращается вокруг самой Земли.

Во времена Коперника еще не было телескопов, приборы для наблюдения были теми же, что и у древних греков: гномоны, квадранты, армиллярные сферы. Поэтому и Коперник ошибался, полагая, будто планеты движутся вокруг Солнца равномерно по окружностям (на самом деле, по эллипсам). Тем не менее система Коперника содержала зерно научной истины, и она стала фундаментом для новой эпохи в развитии астрономии. И хотя вскоре книгу «Об обращении небесных сфер» инквизиция запретила, было уже поздно; идеи Ко-

Памятник Копернику в Варшаве работы скульптора Торвальдсена

Задачи о траекториях

Задача 1. По сторонам прямого угла перемещается шест постоянной длины (рис. 2). Какую траекторию опишет паучок T, находящийся посередине шеста?

Ответ: поскольку медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то паучок опишет четверть окружности с центром O радиуса, равного половине длины шеста.

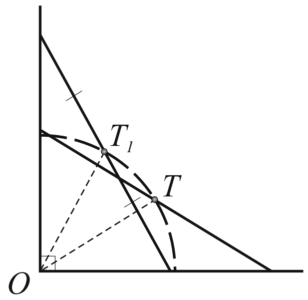

Рис. 2

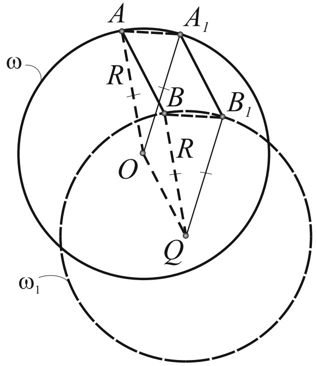

Рис. 3

Задача 2. Отрезок AB движется параллельно себе так, что точка A лежит на окружности ω (рис. 3). Какую траекторию опишет точка B?

Решение. Пусть A перейдет в $A_1 \in \omega$, а B — в B_1; AA_1B_1B — параллелограмм. Соединим A с точкой O — центром окружности — и построим параллелограмм $ABQO$; OA_1B_1Q — тоже параллелограмм, и $OA_1 = QB_1 = OA = R$ (R — радиус окружности ω). Таким образом, $QB = QB_1 = R$.

Ответ: траектория точки B — окружность ω_1 с центром в точке Q того же радиуса, что и ω.

Задача 3. Окружность радиуса, равного высоте h_a равнобедренного треугольника ABC ($b = c$), катится по основанию этого треугольника. Будет ли меняться величина дуги, отсекаемой на окружности держала зерно научной истины, и она стала фундаментом для новой эпохи в развитии астрономии. И хотя вскоре книгу «Об обращении небесных сфер» инквизиция запретила, было уже поздно: идеи Коперника овладели многими пытливыми умами, и астрономия стала развиваться быстро и решительно.

Надо сказать, что любимой книгой Коперника всю жизнь оставались «Начала» Евклида. Быть может, в благодарность за это ученый подарил геометрии задачу, которая сегодня носит название *теоремы Коперника*. Это задача на геометрическое место точек, с весьма неожиданным ответом. Вот она...

Теорема Коперника

Окружность радиуса $r=\frac{R}{2}$ катится без скольжения по внутренней части окружности радиуса R (рис. 1). Какую траекторию опишет произвольная точка T меньшей окружности?

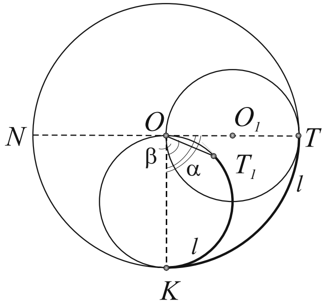

Рис. 1

Решение. Пусть точка T перейдет в некоторую точку T_1. Очевидно,

$$l_{\smile TK}=l_{\smile T_1K}=l$$

(окружность катится без скольжения). Пусть также центральный угол TOK равен α. Поскольку вся окружность составляет 360°, а длина окружности вычисляется по формуле $2\pi R$, то

$$\alpha=\frac{360^\circ}{2\pi R}\cdot l=\frac{180^\circ}{\pi R}\cdot l.$$

$\angle T_1OK=\beta$ является вписанным для меньшей окружности. Поэтому

$$\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{2\pi r}\cdot l=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{2\pi\cdot\frac{R}{2}}\cdot l=\frac{180^\circ}{\pi R}\cdot l,$$

то есть $\beta=\alpha$. Следовательно, точка T_1 лежит на диаметре TN большей окружности.

Таким образом, **если по неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса, то произвольная точка T меньшей окружности движется по диаметру большей окружности.**

Неожиданный ответ, не правда ли? Не окружность, не какая-либо кривая, а диаметр большей окружности!..

Похоже, что так же, как *гелиоцентрическая система* Николая Коперника позвала людей науки к переосмыслению устройства мироздания, так и *теорема Коперника* «пригласила» математиков к составлению новых задач на траектории движения точек.

ного треугольника ABC ($b=c$), катится по основанию этого треугольника. Будет ли меняться величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника?

Решение. Пусть окружность ω с центром O радиуса $AH_1=h_a$ катится по основанию BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 4). Пусть также KN — диаметр ω, параллельный BC. Нетрудно показать, что $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle B$, и, кроме того, $QF\perp KN$ (*покажите*!). Тогда $\angle 5=90^\circ-\angle B$ (где B — фиксированный угол). Значит, вписанный $\angle EQF=90^\circ-\angle B$ является постоянным, а он равен половине дуги EF.

Ответ: величина дуги EF меняться не будет!

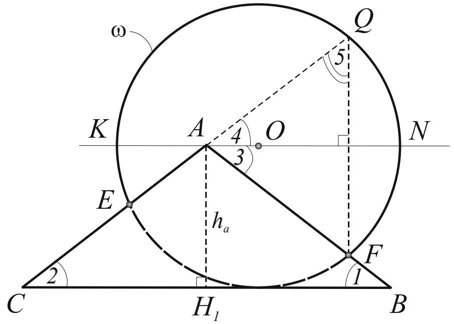

Рис. 4

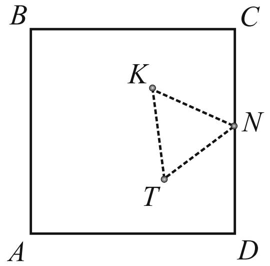

Рис. 5

Задача 4. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K. Для каждой точки N, взятой на стороне квадрата, строится равносторонний треугольник KNT. Какую траекторию опишет точка T, если точка N будет двигаться по сторонам квадрата $ABCD$ (рис. 5)?

Решение. Если взять произвольную точку N на любой из сторон квадрата и повернуть отрезок KN на 60° относительно точки K, то получим точку T, принадлежащую искомой траектории.

Ответ: искомая траектория — данный квадрат $ABCD$, повернутый на 60° относительно точки K.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. BC — фиксированный диаметр окружности ω. Точка A «бегает» по окружности ω. Какую линию описывают центры вписанных окружностей всевозможных треугольников ABC?

Задача 6. Хорда AB окружности ω закреплена, а хорда CD движется по ω, не меняя своей длины. Какова траектория точек пересечения прямых AC и BD?

Задача 7. В условиях задачи 2 определите, какую траекторию опишет середина AB.

Ответы: **5.** Две дуги с концами в B и C. Каждая соответствует углу 135°. **6.** Окружность, которую хорда AB делит на определенные дуги. **7.** Окружность.

Материал подготовлен ***Г. Филипповским***